БИФУРКАЦИЯ ХОПФА В ТРЕХМЕРНОЙ SIRS МОДЕЛИ С ДИФФУЗИЕЙ

П. М. Кравец

Самарский Государственный Аэрокосмический Университет им. ак. С.П. Королёва (национальный исследовательский университет),
kravetspavel@yahoo.com

Объектом исследования является модифицированная трехмерная эпидемиологическая *SIRS*-модель (***S**usceptible*, ***I**nfected*, ***R**emoved with immunity*) с так называемой насыщенной заболеваемостью. SIRS-модели являются частью общепринятой классификации эпидемиологических моделей и были впервые введены в [1, 2]. Данные модели задают взаимосвязь между количеством индивидов *X*, подверженных заболеванию, количеством инфицированных Y и количеством индивидов Z, получивших временный иммунитет.

Особенностью рассматриваемой в данной работе модели (см. рисунок 1) является учет таких факторов, как естественная смертность, рождаемость и «насыщенная» заболеваемость, присутствующая в системе в форме $\lambda XY/(X+H)$. В случае, если количество индивидов подверженных заболеванию $X \gg H$, то заболеваемость выражается как λX. Такая зависимость наблюдается при распространении редкой болезни, то есть когда популяция «насыщена» индивидами, склонными к заболеванию. Впервые такая форма заболеваемости была предложена в [2]. В работе [3] доказывается существование параметров, при которых наблюдается бифуркация периодических решений системы (1). Подробный анализ бифуркаций Хопфа описан в [4].

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "bN"] & X \arrow[r, "\lambda XY/(H+X)"] \arrow[d, "dX"'] & Y \arrow[r, "\gamma Y"] \arrow[d, "(\alpha+d)Y"'] & Z \arrow[r, "\delta Z"] \arrow[d, "dZ"'] & X \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
$$

Рисунок 1 – Схема SIRS-модели с «насыщенной» заболеваемостью

Система дифференциальных уравнений, описывающая предложенную в [3] модель:

$$
\begin{cases}
X'(t) = bN - dX - \frac{\lambda XY}{H+X} + \delta Z, \\
Y'(t) = \frac{\lambda XY}{H+X} - (\gamma + \alpha + d)Y, \\
Z'(t) = \gamma Y - (\delta + d)Z, \\
N'(t) = (b-d)N - \alpha Y,
\end{cases} \tag{1}
$$

где α – коэффициент смертности от болезни; γ – коэффициент восстановления; δ – потеря иммунитета; d – естественная смертность; b – рождаемость; $\lambda XY/(X+H)$ – заболеваемость; а *N* – общая популяция, равная сумме *X, Y, Z.*

В данной работе были получены численные значения параметров, при которых наблюдается бифуркация Хопфа. Результаты моделирования продемонстрированы в виде фазовых портретов на рисунке 2.

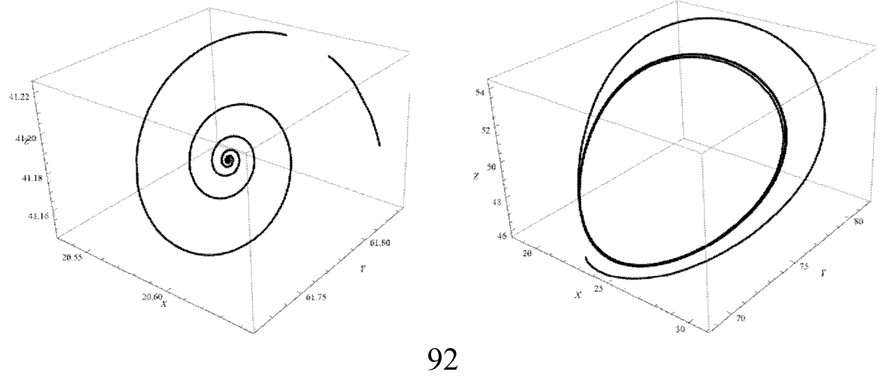

Рисунок 2 – Характерные фазовые портреты системы (1)

В ходе исследования базовая модель для более полного соответствия изучаемому процессу была усложнена с помощью добавления пространственной составляющей и моделирования процесса диффузии. Следующая система дифференциальных уравнений в частных производных описывает пространственную SIRS-модель с диффузией:

$$\begin{cases} \partial_t X = d_1 \Delta X + bN - dX - \frac{\lambda XY}{H+X} + \delta Z, \\ \partial_t Y = d_2 \Delta Y + \frac{\lambda XY}{H+X} - (\gamma + \alpha + d)Y, \\ \partial_t Z = d_3 \Delta Z + \gamma Y - (\delta + d)Z, \end{cases} \quad (2)$$

где *X, Y, Z* – функции от t и *x*, d_1, d_3, d_3 – коэффициенты диффузии, Δ – оператор Лапласа. Краевые условия для задачи Неймана:

$$\frac{\partial X}{\partial n} = \frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{\partial Z}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

где *n* – единичный вектор нормали к граничной области $\partial\Omega$.

В ходе проведенного исследования было доказано существование как пространственно-однородных, так и неоднородных периодических решений. Кроме того, найдены численные значения параметров, при которых наблюдаются такие периодические решения. На рисунке 3 представлены графики функции $X(t, x)$, где $x \in [0, \pi]$ –пространственная переменная, в системе с пространственно-однородными и неоднородными периодическими решениями соответственно.

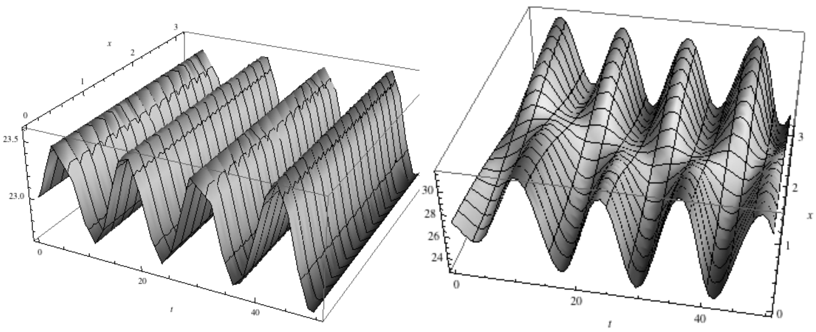

Рисунок 3 – Пространственно-однородные и неоднородные решения системы (2)

Отметим, что допущение одномерности диффузионного процесса не ограничивает потенциал данной модели. Такая модель описывает процесс, в котором *X, Y, Z* задают средние популяции или плотности вдоль некоторой траектории, по которой перемещаются особи. При этом рассматриваемая в данной работе система легко обобщается на физические пространства большей размерности, в частности в двумерном. Кроме того, особый интерес для дальнейших исследований представляет гистерезис, задающий «память» биологической системы о прошлых эпидемиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anderson R. M. et al.* Population biology of infectious diseases: Part I //Nature. – 1979. – Т. 280. – №. 5721. – С. 361.
2. *May R. M. et al.* Population biology of infectious diseases: Part II //Nature. – 1979. – Т. 280. – №. 5722. – С. 455-461.
3. *Mena-Lorcat J., Hethcote H. W.* Dynamic models of infectious diseases as regulators of population sizes //Journal of Mathematical Biology. – 1992. – Т. 30. – №. 7. – С. 693-716.
4. *Дж М., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – 1980.